数学模型

填空题

(1) 数学模型可以描述为，对于现实世界的一个特定对象，为一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。

2. 与数学建模密切关系的数学模拟，主要指运用数字式计算机的计算机模拟。

3. 如果研究对象的机理比较简单，一般用静态、线性、确定性模型描述就能达到建模目的时，我们基本上可以用初等数学的方法来构造和求解模型。

4. 衡量一个模型的优劣全在于它的应用效果，而不是采用了多么高深的数学方法。

5. 当你打算用数学建模方法来处理一个优化问题的时候，首先要确定优化的目标是什么，寻求的决策是什么，决策受哪些条件限制，然后用数学工具表示它们。

6. 建立优化模型要确定优化的目标和寻求的决策。用x表示决策变量，$f(x)$表示目标函数，实际问题一般对决策变量取值范围有限制，不妨记作 $x\in\Omega$，Ω称可行域。优化问题的数学模型可表示为

$$\min(\text{或}\max)\ f(x),\ x\in\Omega$$

7. 优化问题通常有多个决策变量，用n维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 表示，目标函数$f(x)$是多元函数，可行域Ω比较复杂，常用一组不等式（也可以有等式）$g_i(x)\le 0\ (i=1,2,\cdots,m)$来界定，称为约束条件。这类模型表示如下：

$$\begin{aligned}&\min z=f(x)\\&s.t.\ \ g_i(x)\le 0,\ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

8. 上述模型属于多元函数的条件极值问题的范围，然而许多实际问题归纳结出的这种形式的优化模型，其决策变量个数n和约束条件个数m一般较大，并且最优解往往在可行域的边界上取得，这样就不能简单地用微分法求解，数学规划是解决这类问题的有效方法。

9. 由于目标函数和约束条件对于决策变量而言都是线性的，所以称为线性规划（LP）

10. 当我们的研究对象涉及某个过程或物体随时间连续变化的规律时通常会建立微分方程模型。

11. 建立微分方程模型通常采用机理分析方法。

12. 差分方程是在离散的时间点上描述研究对象动态变化规律的数学表达式。

13. 多属性决策和层次分析法是处理对一些重领域重要性、影响力作比较、评价的让主观的标准的决策问题的常用方法。

14. 效益型属性越大，对决策重要程度越高。　费用型属性越大，对决策重要程度越低。

15、一致阵A以下代数性质：
A的秩为1、唯一非零特征根为n，任一列向量都是对应于特征根n的特征向量。

16、不论是层次分析法还是多属性决策，重点都是要确定准则(属性)对目标的权重和方案对准则(属性)的权重，其手段可分为相对量测和绝对量测。

17、现实世界的变化受着众多因素的影响，这些因素根据其本身的特性及人们对它们的了解程度，可分为确定的和随机的。

18、如果随机因素对研究对象的影响必须考虑，就应该建立随机性的数学模型，简称随机模型

19、如果由于客观事物内部规律的复杂性及人们认识程度的限制，无法分析实际对象内在的因果关系，建立合乎机理规律的数学模型，那么通常的办法是搜集大量的数据，基于对数据的统计分析去建立模型。

20、在模型检验中，线性回归模型，拟合优度 R^2 越接近1越好。

21、二元线性回归模型：$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\varepsilon$
(保持 x_1 不变，x_2 增加一个单位，y 的变)

22、这种在已知样本分类的前提下，利用已有的样本数据建立判别模型，用来对未知类别的新样本进行分类的问题属于统计学中的判别分析

简答题：

1、数学建模的意义：

(1)在一般工程技术领域，数学建模仍然大有用武之地。

(2)在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具。

(3)数学迅速进入一些新领域，为数学建模开拓许多新的处女地。

2、数学建模具体的应用

(1)分析与设计 (2)预报与决策 (3)控制与优化 (4)规划与管理

3、数学建模一般步骤

(1)模型准备 (2)模型假设 (3)模型构成 (4)模型求解 (5)模型检验 (6)模型应用

4、数学模型的特点

(1)模型的逼真性和可行性 (2)模型的渐近性 (3)模型的强健性
(4)模型的可转移性 (5)模型的非预制性 (6)模型的条理性
(7)模型的技艺性 (8)模型的局限性

5、数学模型按表现特性分类：

(1)确定性模型和随机性模型 (2)静态模型和动态模型
(3)线性模型和非线性模型 (4)离散模型和连续模型

~~6、解性决策和层次分析法~~

6、多属性决策几个要素

(1)决策目标、备选方案与属性集合 (2)决策矩阵 (3)属性权重 (4)综合方法

7、层次分析法应用的步骤

(1)建立由目标层，准则层，方案层等构成的层次结构

(2)构造下层各元素对上层每一元素的成对比较阵

(3)计算各个成对比较阵的特征根和特征向量，作一致性检验，通过后将特征向量取作权向量。

(4)用分层加权和法计算最下层各元素对最上层元素的权重

模型

(1) 1.3 饺子模型

模型假设：1. 大饺子面皮和小饺子面皮一样厚，满足 $S=nS$ (1)

2、所有饺子形状一样

模型建立：引入"特征半径" R和r，使得

$V=k_1R^3$, $S=k_2R^2$ (2)

$v=k_1r^3$, $s=k_2r^2$ (3)

在所有饺子形状一样条件下，k_1与k_2相同

在(2)和(3)中消去R和r，得

$V=kS^{\frac{3}{2}}$ $v=ks^{\frac{3}{2}}$ (4)

结合(1)式得 $V=n^{\frac{3}{2}}v=\sqrt{n}(nv)$ (5)

结果与解释：模型(5)不仅定性地说明V比nv大(对于n>1)，大饺子比小饺子包的馅多，而且给出了定量结果，即V是nv的$\sqrt{n}$倍。当饺子数量由100变成50，所以50个饺子能包$\sqrt{100/50}=\sqrt{2}\approx1.4kg$馅

② 路障间距的设计

问题分析

认为汽车在两个相邻路障之间一直在作等加速运动和等减速运动，那么只要确定了加速度和减速度这两个数值，就很容易算出两个相邻路障之间的间距。

收集数据

请驾驶普通牌汽车的司机在与设计路障的环境相似的道路上，模拟有路障的情况作加速行驶和减速行驶，记录行驶中的车速和对应的时间。

模型假设

汽车通过路障时车速为零，其后作等加速运动，当车速达到限速时立刻作等减速运动，到达下一个路障时车速为零。

模型建立

记汽车加速行驶距离为S_1，时间为t_1，加速度为a_1，减速行驶的距离为S_2，时间为t_2，减速度为a_2，限速为V_{max}，有

$$S_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2 \qquad S_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2 \qquad (1)$$

$$V_{max}=a_1t_1 \qquad V_{max}=a_2t_2 \qquad (2)$$

汽车在两相邻路障间行驶的总距离 $S=S_1+S_2$，从(1)，(2)中消去t_1,t_2得到

$$S=\frac{V_{max}^2}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right) \qquad (3)$$

(3)式为路障间距设计的数学模型。对于某个给定限速V_{max}的具体问题，由测试数据估计出加速度a_1和减速度a_2后，即可算出路障间距。

③ 汽车厂生产计划　　P108

问题分析：

模型建立与求解：

设每月生产小、中、大型汽车数量分别为 x_1, x_2, x_3，工厂的月利润为 z，在题目所给参数均不随生产数量变化的假设下，立即可得线性规划模型：

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600 \\ 280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

↓ 加条件："若生产某一类型汽车，则至少要生产80辆"

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600 \\ 280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000 \\ 80y_1 \le x_1 \le My_1 \\ 80y_2 \le x_2 \le My_2 \\ 80y_3 \le x_3 \le My_3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

④钢管下料

进货时，原料钢管是19m，现需要50根4m，20根6m，15根8m，如何下料最节省

问题分析：

首先，应当确定哪些切割模式是可行的。所谓一个切割模式，就是按照客户需要在原料钢管上安排切割的一种组合。见下表

而所谓节省，可以有两种标准：一是切割后剩余总余量最小，二是切割原料总根数最少

	4m 根数	6m 根数	8m 根数	余料 /m
模式1	4	0	0	3
模式2	3	1	1	1
模式3	2	0	1	3
模式4	1	2	0	3
模式5	1	1	1	1
模式6	0	3	0	1
模式7	0	0	2	3

模型建立

用x_i表示按照第i种模式切割原料钢管根数。

(1)以切割后剩余总余料量最小为目标

$$\min z_1 = 3x_1 + \cancel{2}x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$$

(2)以切割后~~剩余~~原料钢管总根数最小为目标

$$\min z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \\ x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

⑤ 一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为2x，求该曲线方程

解：设所求曲线方程为$y=y(x)$，则有如下关系式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2x & ① \\ y|_{x=1}=2 & ② \end{cases}$$

由①得 $y=\int 2x\,dx=x^2+C$ （C为任意常数）

由②得 $C=1$，因此所求曲线方程为 $y=x^2+1$

⑥ 列车在平直路上以20m/s的速度行驶，制动时获得加速度 $a=-0.4m/s^2$，求制动后列车运动规律

解：设列车制动后t秒行驶了s米，即求 $s=s(t)$

已知 $$\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2}=-0.4 \\ s|_{t=0}=0, \quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$$

由前一式两次积分，可得 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

利用后两式可得 $C_1=20 \quad C_2=0$

因此所求运动规律为 $s=-0.2t^2+20t$

说明：利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住，以及制动后行驶了多少路程