

概率论 (第一章)

1. 事件间的关系与运算

三大关系	三大运算
互斥 $A \cap B = \emptyset$ (对立: $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$)	和事件 $A \cup B$
包含 $A \subset B$ (相等: $A = B$)	差事件 $A - B = A \bar{B}$
独立 $P(AB) = P(A)P(B)$	积事件 $A \cap B$

2. 运算公式:

1) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $\xrightarrow{A, B \text{ 互斥}} P(A) + P(B)$

2) 减法公式: $P(B - A) = P(B) - P(AB)$ $\xrightarrow{A \subset B} P(B) - P(A)$

特别地, $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

3) 乘法公式: 当 $P(A) > 0$ 时, $P(AB) = P(B|A)P(A)$ $\xrightarrow{A, B \text{ 独立}} P(B)P(A)$

4) 德摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3. 重要结论:

1) 不可能事件 $\emptyset$ 与任何事件都互斥

2) 若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

3) 若 $P(A) = 0$, 则 A 与任何事件都独立

4) A 与 B , A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中任一对相互独立, 则其它三对也相互独立.

5) 若 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则 " A, B 相互独立" 与 " A, B 互斥" 不能同时成立.

4. $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$



5 求复杂事件概率的一般步骤

(1) 设事件, 并写出已知事件的概率

(2) 通过已知事件的运算表示未知事件

(3) 利用概率的性质与运算公式计算未知事件的概率

6.

$$\text{分布函数} \\ F(x) = P(X \leq x)$$

↕
随机变量 X

离散型

非离散非连续

连续型

分布律

$$P(X=x_k) = p_k$$

概率密度

$$f(x)$$

7.

	离散型	连续型
特征/概率密度	(1) $p_k \geq 0$; (2) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k = 1$	(1) $f(x) \geq 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
分布函数	(1) $F(x)$ 是一个不减函数 (2) $0 \leq F(x) \leq 1$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ $F(x)$ 是阶梯型函数	$F(x)$ 是连续函数
	$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X=x_k)$	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
事件的概率	$P\{a < X < b\}$ $= \sum_{a < x_k < b} P(X=x_k)$	$P(X=x_0) = 0$ $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$



8. (1) 离散型: $X \sim b(1, p)$ $E(X) = p$ $D(X) = p(1-p)$ $P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k}$

$\uparrow n=1$

$\uparrow n \rightarrow \infty$

$\downarrow p \rightarrow 0$

$X \sim b(n, p)$ $E(X) = np$ $D(X) = np(1-p)$ $P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim \pi(\lambda)$ $E(X) = \lambda$ $D(X) = \lambda$ $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

(3) 连续型:

均匀分布: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ $X \sim U(a, b)$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

指数分布: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ $X \sim \exp(\theta)$ $E(X) = \theta$ $D(X) = \theta^2$

正态分布: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $E(X) = \mu$ $D(X) = \sigma^2$

七指注

9. 关于正态分布的结论

(1) $X \sim N(0, 1) \Rightarrow \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

i) $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow$

$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\left\{\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

ii) $P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 0.9974$

iii) $aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$



联合分布求事件概率: 离散 $\sum_{(x,y) \in G} P_{ij}$
 $P\{(X,Y) \in G\} \begin{cases} \text{离散} & \sum_{(x,y) \in G} P_{ij} \\ \text{连续} & \iint_G f(x,y) dx dy \end{cases}$

10. 二维随机变量的联合分布

(一) 联合分布函数

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), x \in R, y \in R$$



(二) 离散型二维随机变量的联合分布

$$\text{联合分布律: } P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$$

$$(1) p_{ij} \geq 0 \quad (2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad (\text{规范性})$$

$$P\{(X,Y) \in G\} = \sum_{(x,y) \in G} p_{ij}$$

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$

(三) 连续型二维随机变量的联合分布

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv$$

联合概率密度

$$(1) f(x,y) \geq 0 \quad (\text{非负性})$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

11. 边缘分布 X, Y 各自的分布

$$\begin{cases} 1. F_X(x) = F(x, +\infty) & F_Y = F(+\infty, y) & \text{联合分布函数 } F(x,y) \Rightarrow \text{边缘分布函数} \\ 2. P\{X=x_i\} \triangleq p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} & P\{Y=y_j\} \triangleq p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} & \text{联合分布律 } P\{X=x_i, Y=y_j\} \triangleq p_{ij} \Rightarrow \text{边缘分布律} \\ 3. f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy & f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx & \text{联合概率密度 } f(x,y) \Rightarrow \text{边缘概率密度} \end{cases}$$

$$X, Y \text{ 相互独立} \begin{cases} F(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \\ p_{ij} = p_i \cdot p_{\cdot j} \\ f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \end{cases}$$



12. 四种分布具有可加性

(1) 正态分布的可加性: $\sum_{i=1}^n C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n C_i \mu_i, \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2)$
 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$
 X_i 相互独立

(2) χ^2 分布的可加性: $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$
 $X_i \sim N(0, 1)$
 X_i 相互独立

(3) 泊松分布的可加性: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \pi(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$
 $X_i \sim \pi(\lambda_i)$
 X_i 相互独立

(4) 二项分布的可加性: $\sum_{i=1}^n X_i \sim b(\sum_{i=1}^n n_i, p)$
 $X_i \sim b(n_i, p)$
 X_i 相互独立

13. 期望:

离散型

连续型

定义 $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 函数的期望 $E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^n g(x_k) p_k$ $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 性质: ① $E(C) = C$ ② $E(CX) = CE(X)$ ③ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$, $E(X+C) = E(X) + C$ ④ X 与 Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

14. 方差:

方差的概念: $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$ 性质: ① $D(C) = 0$ ② $D(CX) = C^2 D(X)$ $D(X+C) = D(X)$ ③ $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$ $\Rightarrow$ 当 X 与 Y 独立时, (独立是充分条件, 不是必要条件) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$ 15. 契比雪夫不等式 $0 \leq P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 或 $1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \leq 1$ 

k 阶原点矩 $E(X^k)$
 k 阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^k\}$

16 协方差

$$\begin{cases} \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \\ \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \end{cases}$$

—— X 与 Y 的协方差

—— X 与 Y 的相关系数

(ρ_{XY} 较小时, X, Y 的线性相关程度较

17 不相关与独立的关系

(1) 不(线性)相关定义, 当 $\rho_{XY}=0$ 时, X 与 Y 不相关

(2) X 与 Y 相互独立: $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 或 $P_{ij} = P_i \cdot P_j$

X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$ 或 $\text{Cov}(X, Y)=0$ 或 $E(XY)=E(X)E(Y)$

(3) X 与 Y 相互独立, 则 X 与 Y 一定不相关

X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 不一定相互独立

(4) 对正态随机向量 (X, Y) , X 与 Y 不相关与相互独立是等价的

18 中心极限定理

$$\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \text{ 较大}]{\text{近似地}} N\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$

①独立 ②同分布 ③期望 ④方差 ⑤ n 足够大



数理统计:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

观察值 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

观察值 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k=1, 2, \dots$

观察值 $a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, k=1, 2, \dots$

样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k=2, 3, \dots$

观察值 $b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k, k=2, 3, \dots$

	总体	样本	统计量的性质
均值	$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot x_k$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
方差	$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot (x_k - \mu)^2$	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$E(S^2) = \sigma^2$
k阶矩	$\mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot x_k^k$	$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$	$E(A_k) = \mu_k$

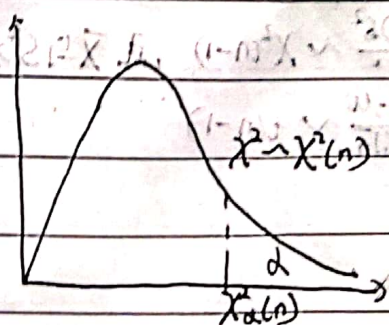
χ^2 分布: $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2, X_i \sim N(0, 1)$

$\chi^2(n), E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$

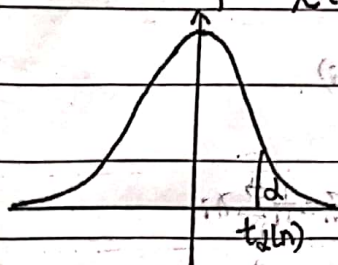
可加性: $\chi^2_1 + \chi^2_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

当 $n \leq 45$ 时, 直接查表

当 $n \geq 45$ 时, $\chi^2(n) \approx \frac{1}{2} (Z_{\alpha} + \sqrt{2n-1})^2$



t分布 $X \sim N(0,1)$ X 与 Y 独立 $\rightarrow t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$
 $Y \sim \chi^2(n)$



$$E(t) = 0 \quad (n > 1)$$

$$D(t) = \frac{n}{n-2}$$

$$\text{分位数 } t_{\alpha}(n) \Rightarrow t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$$

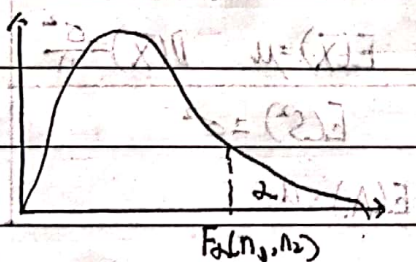
当 $n \leq 45$ 时, 查表

当 $n > 45$ 时, $t_{\alpha}(n) \approx z_{\alpha}$

F分布: $U \sim \chi^2(n_1)$

$$U \text{ 与 } V \text{ 独立} \rightarrow F = \frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

$V \sim \chi^2(n_2)$



$$F_{\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

正态总体的样本均值与样本方差的分

$$E(\bar{X}) = \mu \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{对任意分布的总体}$$

$$\begin{cases} \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) & \text{或 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \text{ 且 } \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立} \\ \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \end{cases}$$



若对任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$
 $E(\hat{\theta}) = \mu$ 不是 μ 的无偏估计
 $E(S^2) = \sigma^2$
 $E(A_k) = \mu_k$

一个参数可以有不同无偏估计量

点估计

矩估计法

最大似然估计法

估计量的评选

无偏性
有效性
相合性

区间估计

μ 的区间估计
 σ^2 的区间估计

$\mu_1 = \mu_2$ 的区间估计

σ_1^2 / σ_2^2 的区间估计

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$$

点估计——矩估计法

1. 理论依据：样本 L 阶原点矩

$$A_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^L$$

总体 L 阶原点矩

$$\mu_L = E(X^L), \text{ 则}$$

$$A_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^L \xrightarrow{P} \mu_L = E(X^L) \quad L=1, 2, \dots, k$$

$$g(A_1, A_2, \dots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$$

2. 矩估计量

$$\hat{\mu}_L = A_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^L$$

$$g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k) = g(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

3. 具体做法

(1) 由

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \end{cases}$$

(2) 反解得

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1, \dots, \mu_k) \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1, \dots, \mu_k) \end{cases}$$

(3) 用 A_i 代替 μ_i ($i=1, \dots, k$) 得

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

$$\hat{\theta}_k = \theta_k(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

$\theta_1, \dots, \theta_k$ 的矩估计量



区间估计中置信概念, $P\{L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \geq 1-\alpha$

$1-\alpha$ ——置信水平 (L, U) —— θ 的置信区间 L —— θ 的置信下限 U —— θ 的置信上限

求 θ 的置信区间步骤如下:

(1)寻找枢轴量 $W = W(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$, 其分布已知

(2)确定 a, b , 使 $P\{a < W < b\} \geq 1-\alpha$

(3)由 $P\{a < W < b\} \geq 1-\alpha$ 反解, 得 $P\{L < \theta < U\} \geq 1-\alpha$, 从而 θ 的置信区间为 (L, U)

一个正态总体均值与方差置信区间

	待估参数	其它参数	枢轴量 W 的分布	置信区间
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2})$
	μ	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
	σ^2	μ 未知	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$



假设检验的步骤:

(1) 提出 H_0 和 H_1 (2) 构造检验统计量 (3) 对于 α 确定 H_0 的拒绝域(4) 代入样本值 $(x_1, \dots, x_n)$ 进行检验

其它参数	原假设	检验统计量	备择假设	H_0 的拒绝域
σ^2 已知	$H_0: \mu = \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$ Z \geq Z_{\alpha/2}$
	$H_0: \mu \leq \mu_0$		$H_1: \mu > \mu_0$	$Z \geq Z_\alpha$
	$H_0: \mu \geq \mu_0$		$H_1: \mu < \mu_0$	$Z \leq -Z_\alpha$
σ^2 未知	$H_0: \mu = \mu_0$	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$ t \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
	$H_0: \mu \leq \mu_0$		$H_1: \mu > \mu_0$	$t \geq t_\alpha(n-1)$
	$H_0: \mu \geq \mu_0$		$H_1: \mu < \mu_0$	$t \leq -t_\alpha(n-1)$
μ 未知	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$		$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$
	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$		$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

