高数B1复习

- 函数与极限
  - 同一个函数判定
    - 定义域相同
    - 运算法则相同
  - 反函数求解
    - y = f (x) 形式，解出原式X = ? ，再用y替换
  - 数列极限
    - 收敛性质
      - 有界性
        - 收敛一定有界
        - 有界不一定收敛
      - 保号性
        - 极限与f(x)同号
  - 函数极限
    - 两个重要极限
      - 识别
      - 应用
        - 极限为指数形式
          - 代值
            - 极限都存在
            - 极限有一个或都不存在
              - 构造重要极限，x →∞ (1+无穷小) 的无穷大次方。
    - 极限运算
      - 洛必达
      - 冷门，运算符号和极限符号可互换位置
        - eg：lim和ln
  - 无穷大和无穷小
    - 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
    - 高阶无穷小
      - 0
    - 同阶无穷小
      - 常数C
    - 等价无穷小
      - 1
      - 记忆
  - 连续性和间断点
    - 连续性定义
      - 趋近于某点的极限等于该点的函数值
      - 函数的光滑性
    - 连续性考题
      - 思路：初等函数都为连续的，所以讨论的重点在于x，在该x的两侧能产生不同的出函数式，该点就是讨论的点
        - 讨论方法：左极限等于右极限是否等于该点函数值
    - 间断点
      - 三种情形
        - 在X = X0没有定义
        - 在X = X0有定义，但极限不存在
        - 在X = X0有定义，极限存在，但是不符合连续性定义
      - 分类
        - 标准（左右极限是否存在）
          - 存在（第一类间断点）
            - 左右极限相等？
              - √
                - 可去间断点
                - 逆推考点（特征）
                - 在某点函数f（x）可导
                - 隐示左右极限存在且相等
                - 某点极限不等于某点的函数值（结合导数定义式）
              - x
                - 跳跃间断点
          - 不存在（第二类间断点）
            - 无穷间断点
            - 振荡间断点
      - 考题
        - 求间断点，指出间断点类型
          - 思路
            - 根据间断点的三种情况求出间断点
            - 将每个点分类讨论
              - 讨论方法
                - 代入直接求极限
                - 若有值
                - 与该点函数值比较
                - 不等为可去间断点
                - 若无值
                - 其他间断点，求出什么就是什么。
  - 闭区间连续函数的性质
    - 零点定理
      - 若函数f(x)在闭区间［a,b］连续，两个端点函数值乘积为负，则在该区间至少有一个解。

- 导数和微分
  - 导数概念
    - 考定义式(拼凑)
    - 可导性和连续性的关系
      - 可导必定连续
      - 连续不一定可导
        - 图象出现尖点一定不可导
  - 求导法则
    - 复合函数求导
      - 分层(链式求导)
    - 求导公式记忆
      - 着重记忆
        - 反三角函数
        - sec x, csc x ,cot x, tan x
        - 指数
  - 高阶导数
    - 求解高阶导数通式
      - 按照顺序写到四阶导，数学归纳法
  - 隐函数求导
    - 一般隐函数
      - 分层(链式求导)
    - 参数方程确定的隐函数
      - 步骤
        - 分别求出dx/dt
          dy/dt
        - 用上式求出dy/dx
      - 题型
        - 求二阶导，应用公式，顺序不能错！！！
        - 切线，法线方程
    - 指幂函数求导
      - 两边取对数ln
      - 再同时x求导
  - 微分
    - 略

- 中值定理与导数应用
  - 三个常用定理及考题类型
    - 罗尔定理
      - 闭区间连续
      - 开区间可导
        - 在该区间内的每一个数都可导
      - f(a)=f(b)，在区间内至少有一点，使f'(x)=0
      - 考题
        - 满足罗尔定理区间
          - 对f(x)求导
          - 求出使f(x) = 0的点
          - 在开区间内排除这些点
        - 构造函数f(x)=ex g(x)
    - 拉格朗日中值定理
      - 闭连续，开可导
      - f(b)-f(a)=f'(ε)(b-a)
      - 推论
        - 如果导数在区间连续可导，且导数恒为0，那么f(x)=c
    - 柯西中值定理
      - 拉格朗日变形
  - 题型总结(以证明题为主)
    - 某函数在某区间的正确性
      - 表明该函数已经符合了定理条件
      - 写出该定理表达式，代入值
      - 解方程，看是否存在ε
    - 等式证明
      - 恒等式证明(代数式=常数)
        - 拉格朗日的常数推论
        - 找出是f(x) = C的X0点，反代回去
      - 不等式证明(三个量为例)
        - 设出f(x)形式一般与中间量相同
        - 写出公式f(b)-f(a)=f'(ε)(b-a)
        - 代值，化分为整，用含ε的式子表示中间量
        - 利用大小关系构造单独的ε
        - 反代回原式
      - 两个量
        - 形式相似(类比三个量)
        - 形式不同，可能为化简后的结果
  - 洛必达法则(仅适用于0/0，∞/∞的未定式)
    - A型(0/0，∞/∞)
      - 直接对上下分别求导
    - B1型(±∞-∞)
      - 通分
      - 共轭表达式
      - 转化为A型
    - B2型(0x ± ∞)
      - 选择较简单的因式取倒数
        - 转化为A型
    - C型(1的±∞次方 0的0次方 ∞的0次方)
      - 指幂形式
        - 1，取对数
        - 指数，取e
          - 转为B2
          - 转为A
  - 函数性态与导数的联系
    - 单调性
    - 凹凸性
      - 二阶导：大凹小凸
      - 拐点：凹凸性出现变化的点(二阶导为0的点)
    - 极值
      - 可导函数f(x)的极值点是驻点
      - 驻点不一定是极值点 f(x)=x3
      - 导数不存在的点也可能取得极值 f(x)=x绝对值
      - 二阶导角度
        - f(x)在X0连续且f'(X0)=0，f''(X0)≠0
        - f''(X0) > 0,极大值
        - f''(X0) < 0，极小值
      - 考题模板
        - "连续"
          - 极值，连续不一定可导
        - 取得极值
          - 导数不存在的点也可能取到极值
    - 最大值最小值
      - 代值
    - 性态考题
      - 列表讨论f(x)的单调性，凹凸性，极值和拐点
        - 抄题写定义域
        - 求出f'(x)和f''(x).分别令其为0
        - 列表

- 不定积分
  - 准备知识
    - 熟记积分表，特别是∫ax dx
  - 方法
    - 第一类换元法
    - 第二类换元法
      - 特例(分部积分)
      - eX与反三角，等，逆向考虑
    - 三角换元
      - 一般形式(含√)
        - 配一项，变为偶次
      - 特殊形式(含1)
        - 用1的关系
        - 画辅助三角形
    - 部分分式
      - 分母分子的最高次
        - 分子大于分母
          - 除法
        - 分子小于分母
          - 十字交叉

- 定积分
  - 求值
    - 面积
      - 找对应变量的轴
      - 画一个长方形小条
      - 长x宽
  - 换元法
    - 换完元要注意上下限也随之变化
  - 分部积分法
  - 积分上限函数及其导数
    - 原理(微积分第一基本定理)
      - 上限为函数
      - 下限为函数
      - 上下限都为函数
      - 过程熟悉
        记住公式
  - 奇偶函数运算
    - 奇零偶倍
  - 反常积分
    - 略

- 定积分的应用
  - 几何学的应用
    - 准备知识：元素法
      - 面积元素
      - 体积元素
    - 题型
      - 求面积
        - 平面坐标类
          - 准备知识
            - X型：用平行于y轴的直线穿过图形，和相同边界(同一函数)至多有一个交点
            - Y型：用平行于y轴的直线穿过图形，和相同边界(同一函数)至多有一个交点
          - 方法
            - 找积分变量(选坐标轴)
              - 如何选？
                - 符合X型选x轴
                - 符合Y型选y轴
            - 画长方条
            - 算长方条面积
        - 极坐标类
          - 扇形面积 dA=1/2 [p(θ)] ²dθ
      - 求体积
        - 旋转体
          - (X轴为例)底面积 π [f(x)] ²乘高dx
            - V=∫ π [f(x)] ²dx
        - 平行截面面积为已知的立体的体积
          - 步骤
            - 选定义轴，找定义区间［a,b］
            - 在定义区间取任意小区间［x,x + dx］
            - 找垂直于定义轴，且在定义区间的截面
            - 算该截面面积，进行积分
      - 求弧长
        - 三种形态(实为一种)
          - 参数方程
            - x = φ(t)
            - y = ψ(t)
            - 根号下导数平方和
          - 直角坐标方程：y = f(x)
            - 方法：又开
              - x = x
              - y = f(x)
              - 根号下1 + y'²
          - 极坐标方程：p = p(θ)
            - 方法
              - x=p cosθ
              - y=p sinθ
              - 根号下p² + p'²

- 微分方程
  - 概念(微分方程)
    - 函数和其导数的关系式
      解是函数
  - 其他概念
    - 阶数：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数
    - 微分方程的解
      - 特解
      - 齐次解
      - 通解：=特解 + 齐次解
  - 方程类型及处理方法
    - 可分离变量微分方程
      - 处理方法
        - 不同变量放在等号两边
        - 对两边同时积分
    - 齐次方程
      - 处理方法：换元法
        - 将初始方程化为关于y/x的函数
        - 开始用u=y/x代换，则dy/dx=u + x·du/dx
        - 最后分离变量，两边积分
        - 特殊说明：某些时候用x/y代换
    - 一阶线性微分方程
      - 形式：dy/dx + P(x) y=Q(x)
      - 处理方法(不记公式)
        - 识别出P(x),y,Q(x)
        - 构造积分因子e的∫[p(x)dx)次方
        - 等式两端同乘积分因子
        - 左边为：d/dx(积分因子 y)
        - 右边为：Q(x) 积分因子
        - 两边同时积分
    - 可降阶的高阶微分方程
      - y^n=f(x)
        - eg：y'=cosx
        - 方法：有几阶积分几次
      - y''=f(x,y')
        - 识别特征：没有y
        - eg：(1 + x²)y''=2xy'
        - 方法：令y'=p,y''=p'
      - y''=f(y,y')
        - 识别特征：没有x
        - eg：yy'' − y'²=0
        - 方法：令y=p,y''=p (dp/dy)
    - 高阶(二阶)线性微分方程
      - 解的结构：齐次解 + 特解
      - 考题
        - 给出有几个特解，求通解
          - 方法
            - 代入某两个解，得到两个式子
            - 两个式子相减，得到齐次解
            - 最后加上剩余的特解
    - 常系数齐次微分方程(二阶齐次解)
      - 方法(特征方程法)
        - 方程两个不同实根
          - y=C1e^αx + C2e^βx
        - 方程两个相等实根
          - y=(C1 + C2x)e^αx
        - 方程有一对共轭复根
          - y=e^αx(C1cosβx + C2sinβx)
    - 常系数非齐次线性微分方程(二阶特解)
      - 两种类型
        - f(x)=e^λx P(m)x
          - 处理
            - 找出λ和r1,r2
            - 确定k
              - 依据：λ是不是r1,r2中的0，1，2个？
            - 设准确方程：y=x^k·e^λx R(m)x
              - 关于R(m)x怎么设
                - 1 →a
                - x →ax + b
                - x² →ax² + bx + c
                - 其余同理
        - f(x)=e^λx [P(x)cosωx + Q(x)sinωx]
          - 处理
            - 找出λ，ω，r1r2
            - 确定k
              - 依据：λ±ωi是不是r1r2中的0，1，2个？
            - 设出准确方程y=x^k·e^λx [R(m)1·cosωx + R(m)2·sinωx]
              - 如何设R(m)1,2？
                - 1 →acosωx + bsinωx
                - x →(ax + b)cosωx + (cx + d)sinωx
                - 其余同理

免费新青年—leonai学长